Приложение № 3
К приказу Управления образования г. Азова от 12.09.2019 № 617

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В 2019/2020 УЧЕБНОМ ГОДУ

Содержание

Содержание 2
Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного этапа 3
Введение 3
Основные задачи 4
Порядок проведения 4
Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для школьного этапа 5
Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий 8
Описание необходимого материально-технического обеспечения для выполнения олимпиадных заданий 10
Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады 11
Тематика заданий школьного этапа олимпиады 12
Типовые задания школьного этапа олимпиады 21
Рекомендуемая литература для подготовки заданий школьного этапа Всероссийской математической олимпиады 41

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного этапа

Введение

В 2019/2020 учебном году сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы.

Настоящие методические рекомендации подготовлены и направлены для помощи в составлении заданий и для проведения школьного этапа Олимпиады по математике.

Методические материалы содержат характеристику содержания школьного этапа, описание подходов к разработке заданий; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы олимпиадных заданий для проведения школьного этапа олимпиады с решениями. Данные задачи предлагались на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны или включены в сборники олимпиадных задач.

Основные задачи

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является развитие интереса у обучающихся к математике, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования. Важную роль здесь играет свойственное подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха. Квалифицированно составленные математические олимпиады являются соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал, соотнести свой уровень математических способностей с уровнем других учащихся школы. Кроме того, привлекательными для участников являются нестандартные условия задач, предлагаемых на олимпиадах. Они заметно отличаются от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения

квадратных уравнений), и требуют демонстрации креативности участников олимпиады. Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также, в ряде случаев, изменения отношения к нему учителей, возможно недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся допускает при выполнении стандартной школьной контрольной работы арифметические ошибки, либо выполняет ее с не устраивающей учителя аккуратностью.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на школьном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Школьный этап олимпиады проводится для учащихся 4-11 классов.

Конкретные сроки и места проведения школьного этапа олимпиады по математике устанавливаются органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования. Олимпиада для учащихся всех школ муниципального образования проводится по единым заданиям, разработанным для каждой из параллелей 4-11 классов муниципальной предметно-методической комиссией, назначаемой органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования.

В олимпиаде имеет право принимать участие каждый обучающийся (далее - Участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. Число мест в классах (кабинетах) должно обеспечивать самостоятельное выполнение заданий олимпиады каждым Участником. Продолжительность олимпиады должна учитывать возрастные особенности Участников, а также трудность предлагаемых заданий.

Рекомендуемое время проведения олимпиады: для 4 класса - 1-2 урока, для 5-6 классов - 2 урока, для 7-8 классов - 3 урока, для 9-11 классов - 3-4 урока.

Участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Количество победителей и призеров школьного этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором школьного этапа Олимпиады. Отметим, что в каждой из параллелей победителями могут стать несколько участников.

Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для школьного этапа

Задания школьного этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным хотя бы по одному из базовых учебников по математике, алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому ее участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады - определения наиболее способных

Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись не менее 70% участников, со вторым - около 50%, с третьим -20%-30%, а с последними - лучшие из участников олимпиады.

4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.

5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.

6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в начальном и среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 4-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

7. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Желательно использование различных источников, неизвестных участникам Олимпиады, либо включение в варианты новых задач.

8. В задания для учащихся 4-6 классов, впервые участвующих в олимпиадах, желательно включать задачи, не требующие сложных (многоступенчатых) математических рассуждений.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных школах необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.

1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри школьного этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Описание необходимого материально-технического обеспечения для выполнения олимпиадных заданий

Тиражирование заданий осуществляется с учетом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, черно-белая печать. Допускается выписывание условий заданий на доску.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуется тетрадь в клетку. Рекомендуется выдача отдельных листов для черновиков (черновики не проверяются). Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады

Выполнение заданий математических олимпиад не предполагает использование каких-либо справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

Участникам во время проведения олимпиады запрещено иметь при себе любые электронные вычислительные устройства или средства связи (в том числе и в выключенном виде), учебники, справочные пособия.

Тематика заданий школьного этапа олимпиады

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

VI-VII КЛАССЫ

Натуральные числа и нуль.

Делители и кратные числа.

Деление с остатком.

Четность.

Текстовые задачи.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания, переливания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

Построение примеров и контрпримеров.

Разрезания.

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.
Инвариант.
Принцип Дирихле.
Разрезания.
Раскраски.
Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на $\mathbf{2^k}$, 3, $\mathbf{5^k}$, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $\boldsymbol{y = kx}$, $\boldsymbol{y = kx + b}$, $\boldsymbol{y = k/x}$, $\boldsymbol{y = x^2}$, $\boldsymbol{y = x^3}$, $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, $\boldsymbol{y = |x|}$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов

треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на $\mathbf{2^k}$, 3, $\mathbf{5^k}$, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число $\boldsymbol{\pi}$.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень *n-й* степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Типовые задания школьного этапа олимпиады

Ниже приведены примеры типовых задач школьного этапа олимпиады с указанием примерной сложности для соответствующего класса. Задания разбиты по основным темам.

Арифметика, числовые ребусы

(4-5 класс, средняя). Восстановите пример на сложение, где цифры слагаемых заменены звездочками: ** + ** + **= 296.

Ответ. 99+99+98=296.

(4-6 класс, легкая). Найдите решение числового ребуса *AAA-AA-A=B*. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные.

Ответ. 111-11-1=99.

(5-6 класс, средняя). Расставьте скобки в выражении 1 : 2 : 3 : 4 : 5 = 30 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. 1:(2:3:4:5)=30.

(7-8 класс, легкая). Расставьте скобки в левой части выражения 2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. (2:3):((4:5):6)=5.

(7-8 класс, сложная). Сколько решений имеет ребус *ABBB* x *C* + *AC* = *CBAC* ? Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные.

Ответ. 8 решений.

Решение. Заметим, что цифры *A* и *C* - ненулевые. Вычтем из обоих частей равенства $\overline{\boldsymbol{AC}}$. Получим $\overline{\boldsymbol{ABBB}}$ x *C* = $\overline{\boldsymbol{CB00}}$. Поскольку первая цифра числа CB00 равна *C*, это возможно только в случае, когда *A*=1. Получим $\overline{\boldsymbol{1BBB}}$ x *C* = $\overline{\boldsymbol{C000}}$ + $\overline{\boldsymbol{BBB}}$ x *C* = $\overline{\boldsymbol{CB00}}$ = $\overline{\boldsymbol{C000}}$ + $\overline{\boldsymbol{B00}}$, откуда $\overline{\boldsymbol{BBB}}$ x *C* = $\overline{\boldsymbol{B00}}$. Это возможно только при *B = 0*. Итак, *A = 1* и *B = 0*. Подставим эти значения в условие: 1000 x *C* + $\overline{\boldsymbol{1C}}$ = $\overline{\boldsymbol{C01C}}$. Это равенство выполняется при любых *C* . Однако разным буквам соответствуют разные цифры, поэтому *C* ≠ 0 и *C* ≠ 1. Осталось 8 возможностей для *C*. Значит, ребус имеет 8 решений.

(8 класс, средняя). Число, состоящее из *N* цифр 8 (других цифр в числе нет), умножили на число 8. Полученное произведение имеет сумму цифр, равную 1200. Найдите N.

Ответ. 1191.

Решение. Перемножив числа в столбик, получим результат: 7111.. .11104. В этом числе N-2 единицы. А сумма его цифр равна 7 + *(N* - 2) + 4 = 1200, откуда N= 1191.

(8 класс, средняя). Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 50 больше суммы его цифр.

Ответ. Например, 9811111.

Разрезания

(4-6 класс, средняя). Разрежьте угол 8 x 8 на уголки из трех клеток (см. рис. 1).

Решение. Одно из возможных решений показано на рис. 2.

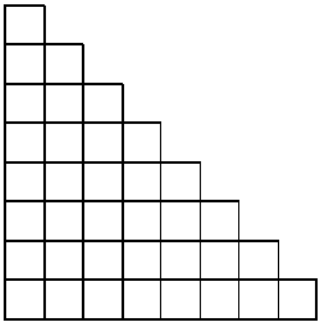


Рис. 1

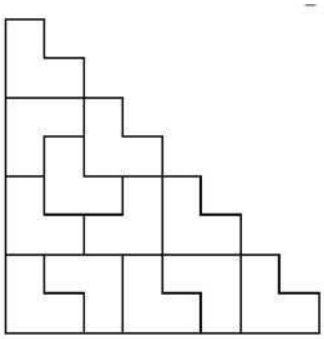


Рис. 2

(7-8 класс, средняя). Разрежьте квадрат 3x3 на две части и квадрат 4x4 на две части так, чтобы из полученных четырех кусков можно было сложить квадрат.

Решение. Два возможных варианта показаны на рис. 3.

Текстовые задачи

(4-5 класс, легкая). На листе бумаги нарисованы квадрат и прямоугольник. Квадрат имеет площадь 25 см^2. Одна из сторон прямоугольника на 1 см больше стороны квадрата, а

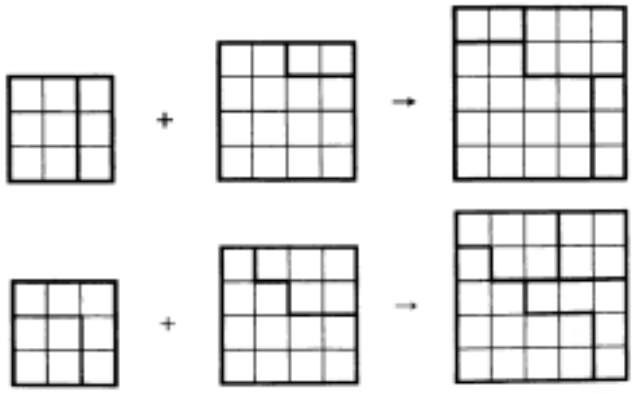


Рис. 3

другая сторона на 2 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь этого прямоугольника.

Ответ. 18 см^2.

(6-7 класс, средняя). Петя сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Маша сказала, что у нее братьев в три раза больше, чем сестер. Сколько детей в семье, если Маша и Петя - брат и сестра?

Ответ. 5 детей (3 брата и 2 сестры).

Решение. Пусть сестер в семье x. Тогда из ответа Пети следует, что братьев в семье x+1. Теперь из ответа Маши получаем уравнение x+1=3(x-1), откуда x=2.

(5-7 класс, средняя). У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишневого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть все варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из

5+8+10=23 банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и все варенье съесть не сможет.

(5-7 класс, средняя). В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

Решение. При первом взвешивании в одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири: 12=6+6. Получили искомое количество гвоздей: 19=13+6.

(5-7 класс, средняя). На прямой через равные промежутки поставили сто точек, и они заняли отрезок длины *a*. Затем на прямой через такие же промежутки поставили десять тысяч точек, и они заняли отрезок длины b. Во сколько раз *b* больше *a*?

Ответ. В 101 раз.

Решение. Обозначим длину промежутка за *x*. Сто точек делят отрезок длины *a* на 99 промежутков, а 10000 точек делят отрезок длины *b* на 9999 промежутков. Поэтому a=99*x*, b=9999*x* и b=101*a*.

(6-7 класс, средняя). К новогоднему празднику школа покупает каждому ученику по шоколадке. известно, что если покупать шоколад в упаковках по 20 шоколадок в каждой, то понадобится на 5 упаковок больше, чем упаковок по 24 шоколадки. Сколько учеников в школе?

Ответ. 600.

(7-8 класс, средняя). Три ученика *A, B* и *C* участвовали в беге на 100 м. Когда *A* прибежал на финиш, *B* был позади него на 10 м, также, когда *B* финишировал, *C* был позади него на 10 м. На сколько метров на финише *A* опередил *C*?

Ответ. На 19 метров.

Решение. Скорость *B* составляет 0,9 от скорости *A*, а скорость *C* составляет 0,9 от скорости B, т.е. 0,81 от скорости *A.*

(7-8 класс, средняя). Определите, чему равен угол между часовой и минутной стрелками часов в 23 часа 45 минут.

Ответ. 82,5°.

Решение. Угол между минутной стрелкой и «12» равен 90°, а между часовой и «12» равен четверти от угла между «11» и «12», т.е. равен $\frac{1}{4} \cdot \frac{360^0}{12} = 7,5^0$.

(8-9 класс, средняя). Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к 17.00 проехал в 1,25 раза больший путь, чем к 16.00. Когда поезд выехал?

Ответ. В 12.00.

Решение. За 1 час от 16.00 до 17.00 поезд проехал 0,25 пути с момента выезда до 16.00. Значит, он ехал 4 часа и выехал в 12.00.

(7-8 класс, средняя). Два автомобиля, находящиеся на расстоянии *S* км друг от друга, движутся навстречу друг другу. Скорость первого автомобиля v_1 км/ч, второго - v_2 км/ч. Через какое время они снова окажутся на расстоянии *S* км друг от друга?

Ответ. $\frac{2S}{v_1+v_2}$

Решение. Автомобили встретятся через -------- $\frac{S}{v_1+v_2}$ ч. Поэтому через такое же время после момента встречи расстояние между ними снова станет равно *S*.

(7-8 класс, средняя). В два киоска поступил товар по одинаковой цене. Через неделю в первом киоске все цены были снижены на 10%, а еще через неделю - подняты на 20%. Во втором киоске через две недели цены были увеличены на 10%. В каком киоске через две недели после поступления товара цены ниже?

Ответ. В первом киоске.

Решение. Если x - начальная цена товара, то его конечная цена в первом киоске – $\boldsymbol{x \cdot \frac{90}{100} \cdot \frac{120}{100} = 1,08x}$, а во втором – $\boldsymbol{x \cdot \frac{110}{100} = 1,1x}$.

(6-7 класс, сложная). У весов сдвинута стрелка, то есть они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше) чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 3 кг. Когда на весы положили арбуз, весы показали 5 кг. Когда взвесили и арбуз, и дыню, весы показали 7 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гирю в 2 кг?

Ответ. 3 кг.

Решение. На сумму 3 + 5 = 8 кг сдвиг стрелки влияет дважды, а на вес 7 кг - только один раз. Поэтому сдвиг стрелки равен 8 - 7 = 1 кг. Следовательно, правильный вес на 1 кг меньше, чем показывают весы. Значит, если на весы поставить гирю в 2 кг, то они покажут 3 кг.

(9-11 класс, средняя). По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположенных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

Ответ. 9 м/с и 8 м/с.

Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с (x > y). Тогда 10(x + y) = 170 и 170(x - y) = 170. Отсюда находим x = 9 м/с и y = 8 м/с.

Логические задачи

(6-7 класс, сложная). На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: «Мы все лжецы». Вася на это ему ответил: «Нет, только ты». Может ли Толя быть лжецом?

Ответ. Не может.

Решение. Если Толя лжец, то и Вася лжец. Но тогда Петя не может быть ни лжецом (так как он тогда бы сказал правду), ни рыцарем (так как он тогда бы солгал). Значит, Толя не может быть лжецом.

(5-6 класс, средняя). К Васе пришли его одноклассники. Мать Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестренка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?

Ответ. 6.

Решение. Допустим, что гостей действительно больше шести. Тогда правы и Вася, и его сестра, а это противоречит условию задачи. Значит, гостей не больше шести, и Вася неправ. Но тогда должна быть права сестра, иначе снова нарушится условие задачи. Значит, гостей больше пяти. Но если их больше пяти и не больше шести, то их ровно шесть.

(6-7 класс, сложная). Одиннадцать шестиклассников встали в круг. Они договорились, что некоторые из них всегда говорят правду, а все другие - всегда лгут. Каждому из них раздали по две карточки, и каждый сказал: «У меня карточки одного цвета». После этого каждый передал обе свои карточки своему соседу справа. Могли ли они все после этого сказать: «У меня теперь карточки разных цветов»?

Ответ. Не могли.

Рассмотрим двух шестиклассников, стоящих рядом. Про карточки, которые правый из них (П) получил от левого (Л), они дали разные ответы. Значит, один из них говорит правду, а другой - лжет. Пусть следующий по кругу за П - шестиклассник К. Тогда в паре П - К также один говорит правду, а другой - лжет. И так далее. Значит, говорящие правду и ложь - чередуются. Поэтому их должно быть четное количество.

(9-11 класс, средняя). В мешке лежат 26 синих и красных шаров. Среди любых 18 шаров есть хотя бы один синий, а среди любых 10 шаров есть хотя бы один красный. Сколько красных шаров в мешке?

Ответ. 17.

Решение. Так как из 18 шаров найдется хотя бы один синий, то красных не более 17, а из любых 10 шаров найдется хотя бы один красный, то есть синих не более 9. Так как всех шаров 26, то синих - 9, а красных - 17.

Четность

(7-8 класс, сложная). Вдоль забора растут 10 кустов смородины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 1000 ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество ягод на десяти кустах равно сумме пяти нечетных чисел, т.е. числу нечетному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 1000 ягод.

(6-7 класс, сложная). В 6Б классе обучаются 20 учеников. В первой четверти они по трое дежурили по классу. Могло ли так получиться, что в некоторый момент каждый из учеников отдежурил с каждым ровно по одному разу?

Ответ: Не могло.

Решение. Предположим, что такое возможно. Рассмотрим любого ученика. В первое свое дежурство он отдежурил с двумя одноклассниками. Во второе - с двумя другими и т. д. Так как у него 19 одноклассников (нечетное число), то после девятого его дежурства останется ровно один одноклассник, с которым он не отдежурил. Полученное противоречие завершает доказательство.

(6-7 класс, сложная). Два натуральных числа в сумме дают 1001. Вася увеличил каждое из них на 25 и перемножил полученные числа. Он получил, что произведение также оканчивается на 1001. Докажите, что Вася ошибся.

Решение. Если сумма двух натуральных числе равна 1001, то одно из них четное, а другое нечетное. Если к четному числу прибавить 25, получится нечетное число. Аналогично, если к нечетному числу прибавить 25, получится четное число. А произведение четного и нечетного чисел должно быть числом четным и поэтому не может оканчиваться на 1001.

(6-7 класс, средняя). Сумма пяти чисел равна 200. Докажите, что их произведение не может оканчиваться на 1999.

Решение. Произведение чисел нечетно, следовательно, все пять чисел нечетны, и их сумма также должна быть нечетной.

(5-7 класс, сложная). В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам - по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля - 30, а Вася - 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

Ответ. Коля.

Решение. После каждого забега все присутствующие на уроке школьники получают нечётное количество конфет. Поэтому чётность количества полученных конфет у ребят, посетивших все уроки, должна быть одинаковой. Но из трёх чисел 29, 30, 33 первое и третье - нечётные, а второе - чётное. Значит, пропустил урок тот, у кого чётное количество заработанных конфет.

(8-9 класс, трудная). Грани игрального кубика занумерованы числами от 1 до 6. Петя сложил из восьми игральных кубиков куб вдвое большего размера так, что числа на

прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы. Может ли сумма всех 24 чисел, написанных на поверхности сложенного Петей куба, равняться 99?

Ответ. Не может.

Решение. Сумма всех чисел, записанных на гранях этих восьми игральных кубиков равна четному числу (8 • 21). Так как числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы, то они все числа внутри большого куба разбиваются на пары одинаковых. То есть сумма всех чисел внутри большого куба четна. Значит, и сумма всех чисел на поверхности большого куба также должна быть четной (как разность четных чисел) и не может равняться 99.

Делимость

(6-7 класс, легкая). Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.

Ответ. Например, 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.

(5-6 класс, средняя). Каждое из двух чисел не делится на 10. Их произведение равно 1000. А чему может равняться их сумма?

Ответ. 133=125+8.

(6-7 класс, легкая). Придумайте девятизначное число, у которого по крайней мере три разные цифры, и которое делится на каждую из них.

Ответ. Например, число 111111124 (делится на 1, на 2 и на 4).

(7-8 класс, сложная). В классе больше 20, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в шахматный кружок, в 2 раза меньше, чем тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в шашечный кружок, в 3 раза меньше, чем тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе?

Ответ. 24 ученика.

Решение. Пусть в шахматный кружок ходит x ребят, тогда в него не ходит $2x$ ребят. Итак, всего в классе 3x ребят, и количество учеников в классе делится на 3. Аналогично, пусть в шашечный кружок ходит y ребят, тогда в него не ходит 3 y ребят. Итак, всего в классе $4y$ ребят, и количество учеников в классе делится на 4.

Число учеников в классе делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное подходящее число, большее 20 и меньшее 30, это 24.

(9-10 класс, средняя). Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 3n^2 + 6n + 8$ является составным.

Решение. Утверждение задачи следует из разложения данного выражения на множители, каждый из которых больше единицы при всех натуральных n:

$n + 3n + 6n + 8 = n + 8 + 3n + 6n =$

$= (n + 2)(n^2 - 2n + 4) + 3n(n + 2) = (n + 2)(n^2 + n + 4).$

(8-9 класс, сложная). Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2222. Докажите, что их сумма не может равняться 9999.

Решение. Если сумма трех целых чисел равна 9999, то либо они все нечетны (и тогда их произведение оканчивается на нечетную цифру), либо два из них четны, а одно нечетно (тогда их произведение делится на 4, а число, оканчивающееся на 22, на 4 не делится).

(8-10 класс, средняя). Сумма цифр натурального числа A равна сумме цифр числа $3A$.

а) Докажите, что A делится на 3.

б) Докажите, что A делится на 9.

в) Верно ли, что A обязательно делится на 27?

Ответ. в) Не обязательно.

Решение.

а), б) Пусть сумма цифр числа A равна S. Но так как $3A$ делится на 3, то S делится на 3, тогда и A делится на 3. Отсюда следует, что $3A$ делится на 9 и S также делится на 9, то есть A делится на 9.

в) Не обязательно, можно взять, например, A=9.

(8-10 класс, средняя). Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных

числа, меньших 1000, произведение которых делится на 9999.

Ответ. Например, 99, 100 и 101.

Решение. Этот пример можно получить, заметив, что 9999 = 99 • 101.

Замечание. Кроме этого, существует ровно один другой пример: 504, 505, 506.

(9-10 класс, средняя). На доске написано число 543254325432. Некоторые цифры стерли так, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9. Чему равно это наибольшее число?

Ответ. 5435432532.

Решение. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две цифры - либо 3 и 3, либо 2 и 4. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть первую двойку и последнюю четверку.

Алгебра

(8 класс, легкая). Найдите наименьший целый корень уравнения

$(|x|-1)(x+2{,}5)=0$.

Ответ. -1.

(8 класс, легкая). Проходят ли прямые x+y-1=0, 2x-5y+1=0 и 4x-3y-1=0 через одну точку?

Ответ. Да.

Решение. Прямые проходят через точку $\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$

(8-9 класс, средняя). Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 1000. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ. Уменьшится на 1002.

Решение. Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1)=xy+y-x-1$. Произведение увеличилось на 1000, то есть $y-x-1 = 000$ или $y-x=1001$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1)=xy-y+x-1$. Заметим, что $xy-y+x-1=xy-(y-x)-1=xy-1001-1=xy-1002$. То есть произведение уменьшилось на1002.

(8 класс, средняя). Докажите, что если $a + 2b = 3c$ и $b + 2c = 3a$, то $c + 2a = 3b$.

Решение. Сложив два данных равенства, получим $a + 3b + 2c = 3c + 3a$, откуда $c + 2a = 3b$.

Замечание. Решая систему методом подстановки получим: $a = b = c$, откуда также следует доказываемое равенство.

(9 класс, средняя). Найдите сумму двух различных чисел a и b , удовлетворяющих равенству $a^2 + b = b^2 + a$.

Ответ. $a + b = 1$.

Решение. Решение: уравнение можно преобразовать к виду $(a-b)(a+b-1)=0$. А так как $a\neq b$, то $a+b-1=0$, откуда $a+b=1$.

(9-10 класс, средняя). Найдите все пары чисел x, y, для которых выполнено равенство $\sqrt{x-y}+\sqrt{y-x}=x+y+1$.

Ответ. $x = y = -0{,}5$.

Решение. В силу неотрицательности подкоренных выражений должны одновременно выполняться неравенства $x\geq y$, $x\leq y$, откуда и следует $x=y=-0{,}5$.

(9-11 класс, средняя). Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

Ответ. 105.

Решение. Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше, чем 1 + 2 + ... + 9 = 45. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105. Это возможно: (1 + 2 + ... + 9 + 105) : 10 = 15.

(8-9 класс, сложная). В формулу линейной функции $y=kx+b$ вместо букв k и b впишите числа от 11 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось пять функций, графики которых проходят через одну точку.

Решение. Например, графики функций y=11x+20, y=12x+19, y=13x+18, y=14x+17, y=15x+16, проходят через точку (1; 31).

Геометрия

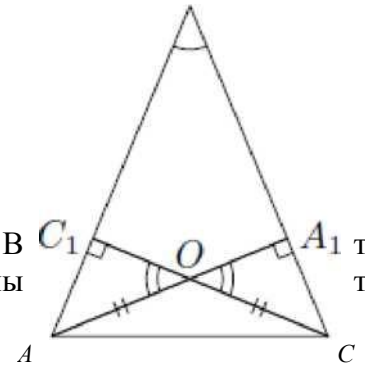
(8 класс, легкая). Сторона *AC* треугольника *ABC* точками *D* и *E* разделена на три равные части (точка *D* лежит между *A* и E). Докажите, что если *BD=BE,* то треугольник *ABC* - равнобедренный.

Решение. Так как треугольник *BDE* равнобедренный, то $<BDE=<BED$. Значит, равны соответствующие смежные углы: $<ADB=<CEB$. По условию, *AD=EC* и *BD=BE*. Поэтому треугольники *ADB* и *CEB* равны (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует равенство сторон *AB* и *BC*. Отсюда следует, что треугольник *ABC* равнобедренный.

(8 класс, средняя). Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке O. Докажите, что если *OA=OC,* то треугольник *ABC* - равнобедренный.

Решение. $\Delta AOC_1=\Delta COA_1$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $OC_1=OA_1$ (см. рис. 4) . Поэтому $AA_1=CC_1$, и, следовательно, $\Delta ABA_1=\Delta CBC_1$ (по катету и острому углу). Откуда *AB=BC*.

Рис.4



(8-9 класс, средняя). В треугольнике *ABC* проведена медиана *AD*. Найдите углы треугольника ABC, если <ADC=120°, <DAB=60°.

Ответ. <A=90°, <B=60°, <C=30°.

Решение. Так как <ADC=120°, то <ADB=60°. Значит, треугольник *ADB* равносторонний (и <ABD=60°). Тогда *BD = AD = DC* и треугольник *ADC* равнобедренный. Значит $<DAC=$ <DCA=(180°-120°):2=30°. Откуда $<BAC$=90°.

(9-10 класс, средняя). У звезды *ACEBD* (см. рис. 5) равны углы при вершинах *A* и B, углы при вершинах *E* и C, а также равны длины отрезков *AC* и *BE*. Докажите, что *AD=BD.*

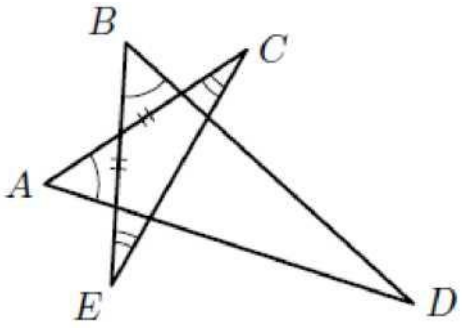


Рис. 5

Решение. Треугольники *ACG* и *BEF* равны (по стороне и двум углам, прилежащим к ней) (см. рис. 6). Следовательно, <AGC=<BFE и *AG=BF*. По теореме о смежных углах <FGD=<GFD. Поэтому треугольник *GFD* равнобедренный (GD=FD). Следовательно, *AG+GD=BF+FD*, т.е. *AD=BD*.

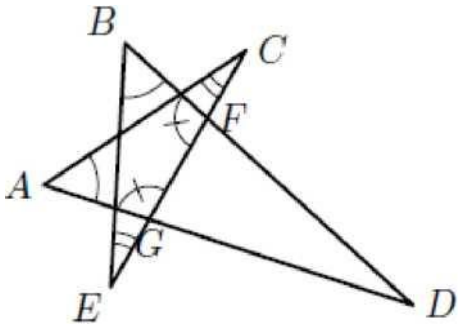


Рис. 6

(9 класс, средняя). В треугольнике *ABC* биссектриса *AE* равна отрезку *EC*. Найдите угол *ABC*, если *AC* = 2AB.

Ответ. <*ABC* = 90°.

Решение. Пусть точка *D* - середина стороны *AC* (см. рис. 7). Тогда *AD=AC/2=AB*. Значит, треугольники *ABE* и *ADE* равны (сторона *AE* - общая, <*BAE*=<CAE). Тогда <*ABC*=<*ADE*=90°, так как *ED* − медиана равнобедренного треугольника *AEC* (*AE=EC* − по условию) и, значит, его высота.

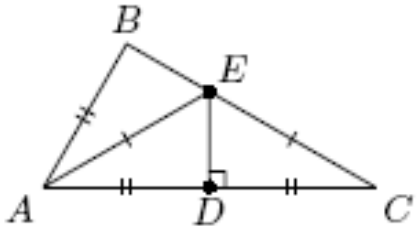


Рис.7

(10-11 класс, средняя). Параллелограмм двумя парами прямых, параллельных его сторонам, разбит на девять параллелограммов (см. рис. 8). Найдите площадь четырехугольника *ABCD*, если площадь исходного параллелограмма равна S_1, а площадь центрального (закрашенного) параллелограмма равна S_2.

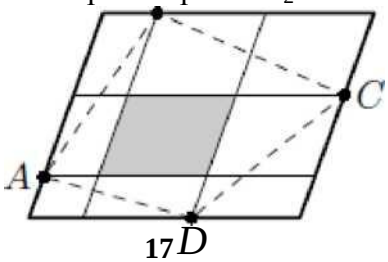


Рис.8

Ответ. $\frac{S_1+S_2}{2}$

Решение. Четырехугольник ABCD складывается из закрашенного параллелограмма и половинок параллелограммов, составляющих рамку.

(10-11 класс, сложная). Точка *D* - середина стороны *AC* треугольника ABC, *DE* и *DF* - биссектрисы треугольников *ADB* и *CDB*. Докажите, что *EF* P*AC*.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника *BE*: *EA* = *BD*: *DA* = *BD*: *DC* = *BF*: *FC*. Отсюда следует, что *EF* P*AC*.

(10-11 класс, сложная). В треугольнике *ABC* биссектрисы углов *A* и *B* пересекают описанную окружность в точках *K* и *L*. Отрезки *AK* и *BL* пересекаются в точке *X* и делятся этой точкой в равных отношениях, считая от вершин треугольника. Докажите, что треугольник *ABC* - равнобедренный.

Решение. Из условия следует подобие треугольников *AXB* и *KXL* - по первому признаку *(<AXB=<KXL)*. Отсюда *<BAK=<LKA*, но <LKA=<ABL (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Так как *AK* и *BL* - биссектрисы, то отсюда следует <A=<B (см. рис. 9).

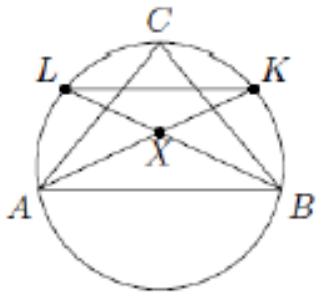


Рис. 9

Комбинаторика

(9-10 класс, сложная). Каких натуральных чисел от 1 до 1000000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13, или делящихся на 13, но не делящихся на 11?

Ответ. Чисел, делящихся на 11, но не делящихся на 13, среди чисел от 1 до 1000000 больше, чем чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 11.

Решение. Действительно, пусть количества этих чисел равны *A* и *B* соответственно, а количество чисел от 1 до 1000000, кратных и 11, и 13, равно C. Тогда A+C - количество чисел, делящихся на 11, а B+C - делящихся на 13. Ясно, что A+C>B+C. Поэтому A>B.

(10-11 класс, средняя). Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?

Ответ. 72 секунды.

Решение. Если на табло горят цифры *ab.cd.mn*, то *a* ^ 7, *c* ^ 7, *m* ^ 7 . Поэтому b=d=n=7.

Но тогда a=0 или 1, c=0, 1, 2, 3, 4, 5, m=0, 1, 2, 3, 4, 5. Всего получается 2• 6• 6 = 72 подходящих наборов цифр, а каждый набор горит 1 секунду.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий школьного этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

АгахановН.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. - М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. - М.: Просвещение, 2008.

АгахановН.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. - М.: Просвещение, 2009.

АгахановН.Х., Подлипский О.К., РубановИ.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. - М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. - М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. - М.: МНИМО, 2011.

Андреева А.Н., Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51-1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). - М.: МНИМО, 2013.

БабинскаяИ.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., ГорскаяЕ.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть **1.** 1998- 2006 - М.: МНИМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006- 2013 - М.: МНИМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. - Киров: Аса, 1994.

ГорбачевН.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). - М.: МНИМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). - М., МНИМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы (5-е издание, стереотипное). - М., МНИМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). - М., МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). - М., МЦНМО, 2014.

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. - М., ГИФМЛ, 1958 - 576 с.

РаскинаИ. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. - М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/